$$\frac{\frac{m}{s}}{\frac{1}{m}} = \frac{m}{s}\,\frac{m}{1} = \frac{m^2}{s} \qquad \frac{\frac{m}{s^2}}{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{\cancel{s^2}}\,\frac{\cancel{s^2}}{m^2} = \frac{1}{m}$$

1·1

Ejercicios Resueltos

Física I

Leyes del Movimiento (1ra Parte)

Ejercicio 1 al 20

- Cinemática escalar - Movimiento relativo -

- Coordenadas Intrínsecas - Leyes de Newton -

- Sistemas No inerciales -

Guía 1: Leyes del Movimiento (1^{ra} Parte)

Índice

Un repaso del CBC sobre gráficos ... 2

La relación entre posición, velocidad y aceleración ... 6

Coordenadas Intrínsecas ... 10

Movimiento relativo y Transformaciones de Galileo ... 15

El impulso de una fuerza ... 26

Sistemas no inerciales ... 29

1. Sin usar valores numéricos representar los gráficos de x en función de t y v_x en función de t en los siguientes casos con aceleración constante:

(a) $a_x < 0$; $v_{x0} > 0$, $x_o > 0$

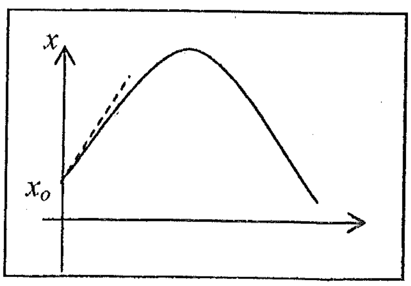
(b) $a_x > 0$; $v_{x0} < 0$, $x_o > 0$

(c) $a_x > 0$; $v_{x0} > 0$, $x_o > 0$

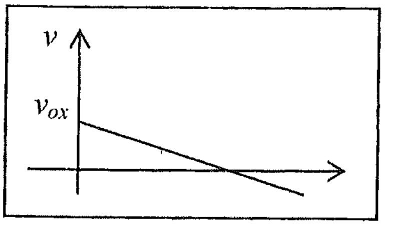
- la aceleración es la derivada segunda de la posición, nos da la concavidad de la curva (sonriente si "a" es positiva o triste en caso contrario)

- la velocidad es la derivada primera de la posición, nos da la pendiente instantánea (la pendiente de la recta tangente)

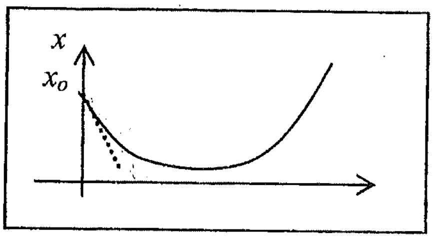
Por lo tanto, en el primer gráfico nos piden concavidad negativa (forma "triste", para abajo), pendiente inicial positiva (línea punteada), y que el valor de la posición donde empieza sea positivo. Podría ser algo así:

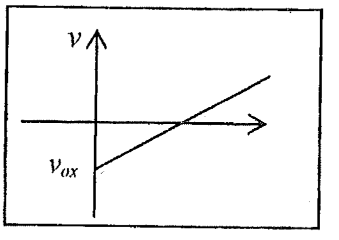


En el caso del gráfico de velocidad es más sencillo, para el caso de aceleración constante tenemos una línea recta cuya pendiente es la aceleración. Por lo tanto, en este caso tenemos una recta hacia abajo, que empieza de un valor positivo de velocidad inicial.

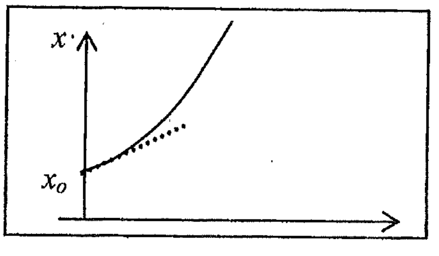


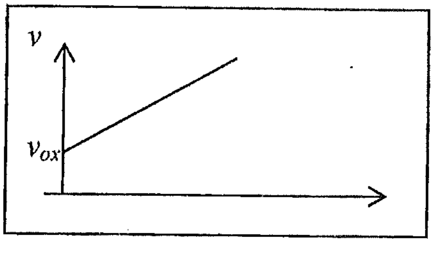
(b) usando los mismos conceptos, cambian los signos de la aceleración y de la velocidad inicial. Nos quedan estos gráficos:





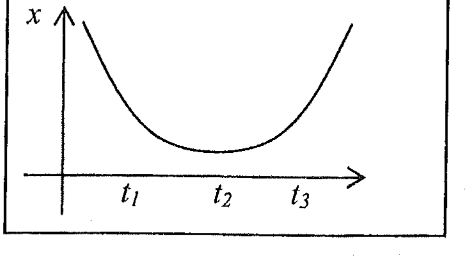
(c) y en este tercer caso debemos cambiar el signo de la v_{ox}, es decir que respecto de los gráficos de (b) cambio la pendiente inicial del primero, y el valor donde empieza la recta en el segundo:





2. La figura muestra un gráfico de x en función de t para un objeto. ¿Cuáles son los signos de v_x y a_x para los tiempos (a) t_1 (b) t_2 (c) t_3 ?

Como sabemos, la velocidad es la pendiente de este gráfico, mientras que la aceleración es la concavidad. Como vemos en el gráfico, para t_1 tenemos velocidad negativa, para t_2 la velocidad es cero, y para t_3 la velocidad es positiva. En cuanto a la concavidad, como siempre es positiva (sonriente) la aceleración también lo es para los tres tiempos.



3. Un hombre situado en la azotea de un edificio lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 12,25 $\frac{m}{s}$. La pelota llega al suelo 4,25s después. (a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? (b) ¿Qué altura tiene el edificio? (c) ¿Con qué velocidad llega la pelota al suelo? (d) Si la velocidad de lanzamiento se midió con una incerteza absoluta de 0,05$\frac{m}{s}$ y el tiempo con un cronómetro digital accionado por célula fotoeléctrica con incerteza absoluta de 0,01s ¿con qué

precisión se midió la altura del edificio? ¿Qué habría ocurrido si el mismo cronómetro fuese accionado manualmente?

(a) Planteo la ecuación del tiro vertical, usando los datos del problema. Tomo sentido positivo hacia arriba, por lo tanto la velocidad inicial es (+) y la gravedad es (-):

Tiro Vertical

$$y = y_o + v_o.t + \frac{1}{2}.\vec{g}.t^2 \xrightarrow{reemplazo} 0 = h + 12{,}25.4{,}25 - 4{,}9.(4{,}25)^2 \rightarrow h = 36{,}44\,m$$

Esta es la respuesta a la parte (b). Para responder la primera parte, usamos en la ecuación complementaria la altura del edificio como posición inicial, y que $v_f = 0$ cuando llega a la altura máxima: ecuación Complementaria

$$(v_f)^2 - (v_o)^2 = 2.g.(y - y_0) \xrightarrow{reemplazo} 0 - (12{,}25)^2 = 2.(-9{,}8).(y - 36{,}44)$$

Tratar de no usar.

De aquí despejamos: $$y = \frac{-(12{,}25)^2}{2.(-9{,}8)} + 36{,}44 \cong 44\,m$$

(c) de la ecuación de velocidad: $$v = v_o + \vec{g}.t \xrightarrow{reemplazo} v = 12{,}25 - 9{,}8.(4{,}25) = -29{,}4\,\frac{m}{s}$$

(d) para hacer la propagación de errores, primero hago el despeje de la ecuación usada en (a):

$$y_o = -v_o.t + \frac{1}{2}.g.t^2$$

Esta es la expresión que nos permitió calcular la altura de la terraza en función de las variables que se midieron y conocían (la velocidad inicial, la gravedad y el tiempo). Derivamos esta expresión respecto a estas tres variables, para hacer la propagación, como vimos en el ejercicio anterior:

Calculo de incertezas.

$$\Delta y_0 = \left|\frac{\partial y_0}{\partial v_0}\right|.\Delta v_0 + \left|\frac{\partial y_0}{\partial g}\right|.\ \Delta g + \left|\frac{\partial y_0}{\partial t}\right|.\ \Delta t =$$

$$= \left|-t\right|.\Delta v_0 + \left|-\tfrac{1}{2}.t^2\right|.\Delta g + \left|-v_o + g.t\right|.\Delta t$$

Reemplazando (para g uso $\Delta g = 0{,}1\,{}^{m}\!/_{s^2}$; como se sugiere en la guía):

$$\Delta y_0 = 4{,}25.\ 0{,}05 + 9{,}03\ .0{,}1 + \ 29{,}4.0{,}01 = 1{,}4\,m$$

El error porcentual resulta entonces $e_{\%} = \dfrac{1{,}4\,m}{36{,}4\,m}.100 \cong 3{,}8\ \%$.

$$e\% = \frac{\Delta x}{x}.100\%$$

Si hubiéramos accionado manualmente el cronómetro, el error absoluto en la medición del tiempo se hubiera incrementado mucho, debido al tiempo de reacción (que como vimos en el problema anterior es del orden de 0,7 s). Y por lo tanto, tendríamos mayor error porcentual y menor precisión.

4. Un automóvil se está moviendo con una rapidez de 45 *km/h* (Δv =0,5 *km/h*) cuando se enciende la luz roja del semáforo de la siguiente esquina. Si el tiempo de reacción del conductor es de 0,7s (Δt = 0,1s) y el auto desacelera a razón de 2,0 m/s^2 (Δa=0,1 m/s^2) en cuanto el chofer aplica el freno, (a) calcule la distancia que recorre el auto desde el momento en que el conductor ve la luz roja hasta que el coche se detiene (el "tiempo de reacción" es el intervalo entre el instante en que el chofer ve la luz roja y aquel en que aplica el freno). (b) Calcule el error absoluto, relativo y porcentual cometido en la medida de la longitud. ¿Tiene sentido físico dar el resultado con décimas de metro? ¿Por qué?

Este problema es similar a uno que resolvimos en la guía del CBC. Desde que se enciende la luz roja del semáforo, el auto ejecuta dos movimientos: primero sigue a velocidad constante, durante el "tiempo de reacción", que es el tiempo que demora el pie en ejecutar la orden que da su cerebro. A partir de ese momento, sigue un MRUV, en el cual el tipo frena hasta detenerse. Escribimos las ecuaciones horarias, usando los datos de velocidad en m/s (para lo cual se divide por 3,6):

Desplazamiento.

MRU: $x = v.\,t \;\rightarrow\; x = 12{,}5\ \tfrac{m}{s}\ .\ 0{,}7\ s = 8{,}75\ m$

Para obtener el error absoluto de esta medición, derivamos la expresión de arriba tomando como variables a la velocidad y el tiempo (las dos magnitudes que se midieron):

$$\Delta x = \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|.\Delta v + \left|\frac{\partial x}{\partial t}\right|.\Delta t = |\,t\,|\,.\Delta v + |\,v\,|.\Delta t$$

Reemplazamos: $\Delta x = |\,0{,}7s\,|\,.0{,}5\tfrac{km}{h} + \left|\,45\tfrac{km}{h}\right|.0{,}1\,s \cong 1{,}3\,m$

MRUV: uso la ecuación complementaria:

Ec. Complement. en x.

$$(v_f)^2 - (v_o)^2 = 2.a.(x - x_0) \xrightarrow{\text{despejo}} x = \frac{-(v_o)^2}{2.a} + x_0$$

Hacemos la cuenta: $$x = \frac{-\left(12{,}5\,\frac{m}{s}\right)^2}{-4\,\frac{m}{s^2}} + 8{,}75m = 47{,}8\,m$$

Y para determinar el error absoluto, derivamos la expresión que usamos para calcular el desplazamiento "x" respecto de las tres magnitudes que contiene: x_0, v_0, a

$$\Delta x = \left|\frac{\partial x}{\partial x_0}\right|.\Delta x_0 + \left|\frac{\partial x}{\partial v_0}\right|.\Delta v_0 + \left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|.\Delta a = |1|.\Delta x_0 + \left|\frac{-2.v_0}{2.a}\right|.\Delta v_0 + \left|\frac{(v_0)^2}{2.a^2}\right|.\Delta a$$

Reemplazamos los datos y los errores:

$$\Delta x = |1|.1{,}3\,m + |6{,}25\,s|.0{,}13\overline{8}\,\tfrac{m}{s} + |19{,}5\,s^2|.0{,}1\,\tfrac{m}{s^2} \cong 4{,}1\,m$$

Usualmente, se toma sólo una cifra del valor del error absoluto obtenido por propagación, redondeándolo. En nuestro caso: $\Delta x = 4\ m$. Para la magnitud despejada no tiene sentido dar las cifras que quedan por debajo del error. Como el error son cuatro unidades, no se dan las cifras decimales. Contesto entonces que la distancia de frenada es 48 m, con una incerteza de 4 m: $x = (48 \pm 4)\,m$

El error relativo se define como el cociente del absoluto sobre la magnitud:

$$e_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{4\,m}{48\,m} = 0{,}08\overline{3}$$

Mientras que el porcentual es el relativo, multiplicado por 100: $e_{\%} = 8{,}3\ \%$. Este error nos da una idea de la precisión de la determinación, ya que compara el error absoluto con lo medido (un error de $1m$ para la medida de una mesa puede ser "grande", mientras que para la distancia de la facultad hasta mi casa puede ser "chico")

5. La aceleración de una motocicleta está dada por a = A.t - B.t^2, con A = 1,2 m/s^2 y B = 0,120 m/s^4. La moto está en reposo en el origen de coordenadas, en t = 0s.

a. Obtener la posición y la velocidad en función del tiempo
b. Graficar la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
c. Calcular la velocidad máxima que alcanza.

La relación entre la posición, la velocidad y la aceleración

Estos resultados también los vimos en el CBC: sean $x_{(t)}$, $v_{(t)}$, y $a_{(t)}$ las funciones vectoriales posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, entonces se tiene que:

$$x_{(t)} \xrightarrow{derivo} x'_{(t)} = v_{(t)} \xrightarrow{derivo} v'_{(t)} = a_{(t)}$$

a) para obtener la función velocidad integro la aceleración respecto al tiempo:

$$v' = \frac{dv}{dt} = a_{(t)} \rightarrow dv = a_{(t)}.dt \xrightarrow{Integro} \int_{v_o}^{v} 1\,dv = \int_0^t \left(1{,}2.t - 0{,}12.t^2\right)dt$$

$\frac{dx}{dt} = V(t)$

$$v - v_o = 0{,}6.t^2 - 0{,}04.t^3 \xrightarrow{v_o=0} v = 0{,}6.t^2 - 0{,}04.t^3$$

Para obtener la función posición integro la velocidad respecto al tiempo:

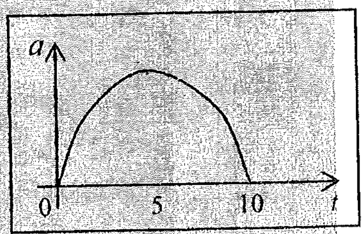
$$x' = \frac{dx}{dt} = v_{(t)} \rightarrow dx = v_{(t)}.dt \xrightarrow{Integro} \int_{x_o}^{x} dx = \int_0^t \left(0{,}6.t^3 - 0{,}04.t^3\right)dt$$

$$x - x_o = 0{,}2.t^3 - 0{,}01.t^4 \xrightarrow{x_o=0} x = 0{,}2.t^3 - 0{,}01.t^4$$

b) para construir las gráficas de las funciones, uso conocimientos de análisis 1. Para cada función con su derivada encuentro los puntos críticos y los intervalos de crecimiento:

- la aceleración es una función cuadrática, por lo tanto tenemos una parábola (convexa porque $a<0$). Su único punto crítico está en:

$$a' = 1{,}2 - 0{,}24.t = 0 \xrightarrow{despejo} t = 5\text{ s}$$

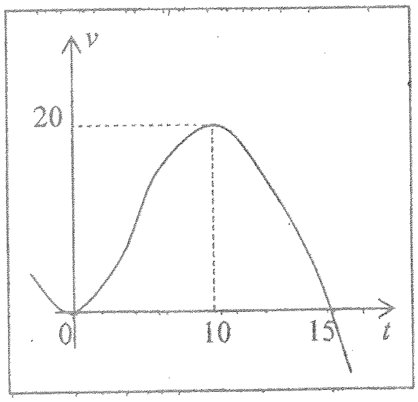


- la velocidad es una función cúbica, la derivo para sacar los puntos críticos

$$v' = 1{,}2.t - 0{,}12.t^2 = 0 \xrightarrow{despejo} t = 0 \ \ y \ \ t = 10s$$

Con la derivada 2^{da} veo si son máximos o mínimos

$$v'' = 1{,}2 - 0{,}24.t \rightarrow \begin{cases} v''_{(0)} = + & mín. \\ v''_{(10)} = - & máx. \end{cases}$$



Reemplazando estos *tiempos* en la función velocidad sacamos los números para marcar en el eje.

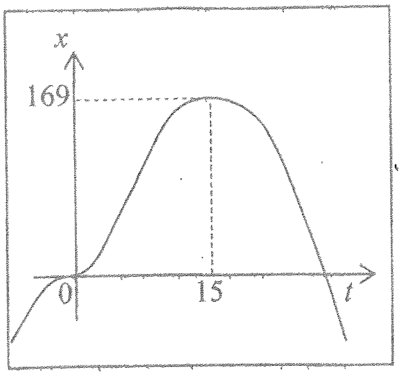
- la posición: la derivo para sacar los puntos críticos

$$x' = 0{,}6.t^2 - 0{,}04.t^3 = t^2.(0{,}6 - 0{,}04.t)$$

De aquí despejo: $t = 0$ y $t = 15$s

Con la derivada 2^{da} veo si son máximos o mínimos

$$x'' = 1{,}2.t - 0{,}12.t^2 \rightarrow x''_{(15)} = - \ \ máx$$



Reemplazando estos *tiempos* en la función posición salen los números para marcar en el eje.

b) la velocidad máxima alcanzada es de 20 *m/s*, la sacamos para construir el gráfico de velocidad, reemplazando el tiempo t =10s (punto crítico que era el máximo relativo)

6. Las coordenadas de un ave que vuela en el plano xy son:

$$x = 2{,}0\ \text{m} - 3{,}6\ \text{m/s.t} \qquad y = 1{,}8\ \text{m/s}^2 \,.\, t^2$$

a. Dibujar la trayectoria del ave

b. Calcular los vectores velocidad y aceleración en función del tiempo

c. Calcular el módulo, dirección y sentido de la velocidad y de la aceleración en t = 3s

d. Dibujar los vectores velocidad y aceleración para t = 3 s. En ese instante, ¿el ave está acelerando, frenando o su rapidez no está cambiando? ¿El ave está girando? De ser así, ¿en qué dirección?

Para dibujar la trayectoria del ave (que es el gráfico del verdadero movimiento espacial que realiza), necesito encontrar la ecuación $y_{(x)}$. Despejo:

$$t = \frac{2m - x}{3{,}6\frac{m}{s}} \xrightarrow{\text{reemplazo}} y = 1{,}8\frac{m}{s^2}.\left(\frac{2m-x}{3{,}6\frac{m}{s}}\right)^2 = 1{,}8\frac{m}{s^2}.\frac{(2m-x)^2}{12{,}96\frac{m^2}{s^2}} = 0{,}13\widehat{8}\frac{1}{m}.(2m-x)^2$$

La ecuación de la trayectoria nos muestra una parábola, cuyo coeficiente a = 0,138 es positivo (por lo tanto es cóncava) y el vértice lo tiene en x = 2. Pero el dibujo lo dejamos para la última parte, así marcamos en él lo que nos piden en (d)

b) derivando las ecuaciones de posición: $\begin{cases} v_x = x' = -3{,}6\frac{m}{s} & ; \quad a_x = x'' = 0 \\ v_y = y' = 3{,}6\frac{m}{s^2}.t & ; \quad a_y = y'' = 3{,}6\frac{m}{s^2} \end{cases}$

c) primero calculamos las componentes para t = 3s, reemplazando en las ecuaciones:

$$v_x = -3{,}6\tfrac{m}{s} \quad ; \quad v_y = 10{,}8\tfrac{m}{s} \quad ; \quad a_x = 0 \quad ; \quad a_y = 3{,}6\tfrac{m}{s^2}$$

Con Pitágoras obtengo los módulos:

$$|v| = \sqrt{(-3{,}6)^2 + (10{,}8)^2} \cong 11{,}4\tfrac{m}{s} \quad \text{y} \quad |a| = 3{,}6\tfrac{m}{s^2}$$

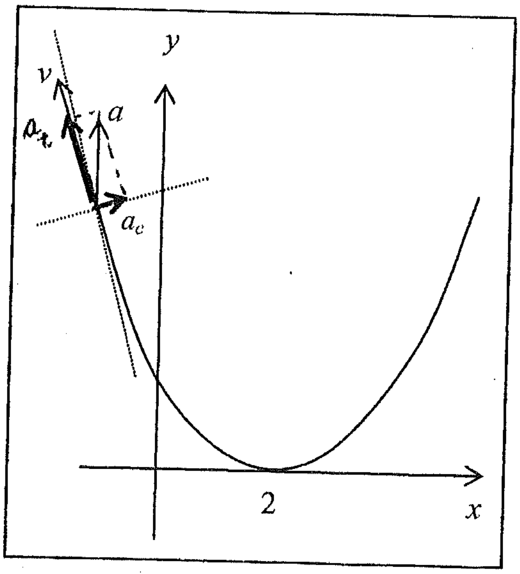
En cuanto a la dirección, en el caso de la aceleración es fácil, porque sólo tiene componente en el eje y, por lo tanto acelera en la dirección de ese eje. Para la velocidad considero el ángulo de este vector con el eje x y por trigonometría:

$$tg(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = -3 \rightarrow \alpha = -71{,}6^\circ$$

d) Bueno, ahora si, hacemos el dibujo de la trayectoria que nos pidieron en (a). Además, para $t = 3s$ marquemos la posición, buscando con las ecuaciones horarias:

$$x = 2 - 3{,}6.3 = -8{,}8\,m$$

$$y = 1{,}8.3^2 = 16{,}2\,m$$



En ese punto marcamos los vectores v y a (para el vector v, al trazarlo tener en cuenta los signos de v_x y v_y) Y mirando con cuidado, vemos que la aceleración se puede descomponer en dos partes:

① una tangente a_t que es la responsable del cambio del módulo de la velocidad y que apunta en la dirección de la recta de la velocidad. Esta componente es a favor de la velocidad, entonces el ave está "acelerando", es decir su rapidez va en aumento.

② una centrípeta a_c que apunta en la línea perpendicular a la velocidad, que es la responsable del cambio de dirección (o sea del giro). Esta componente nos indica hacia donde gira el ave; y como es esperable, da "hacia dentro" de la parábola.

En la página siguiente ampliamos este último punto, en el cuadro de coordenadas intrínsecas.

7. (a) Calcule la velocidad angular de un disco que gira, con movimiento uniforme, 13,2 *rad* cada 6 *s*. (b) Calcule el período y la frecuencia de rotación. (c) ¿Cuánto tiempo tardará el disco en girar un ángulo de 780°, (d) y en efectuar 12 revoluciones? (e) Si la trayectoria está descripta en el plano (x,y), el giro es horario y el radio 1 m, expresar usando versores los vectores **v** y **a** (cuando el cuerpo intercepta los ejes coordenados).

(a) la velocidad angular se define como el cociente entre el ángulo girado (en radianes) sobre el tiempo demorado. En caso de no ser uniforme, habría que tomar límite. Pero, en este caso, basta hacer:

Velocidad angular

$$\omega = \frac{\Delta\alpha_{(rad)}}{\Delta t} = \frac{13{,}2}{6\,s} = 2{,}2\ \frac{1}{s}$$

(b) con las fórmulas que vimos en el CBC:

$$\omega = \frac{2.\pi}{T} \xrightarrow{despejo} T = \frac{2.\pi}{\omega} = \frac{6{,}283}{2{,}2\,\frac{1}{s}} = 2{,}86\ s \ \rightarrow\ f = \frac{1}{T} = 0{,}35\ hz$$

Veloc. angular. Período. frecuencia

La unidad que se obtiene es $\frac{1}{s}$, y que en el caso de frecuencias se la llama "hertz".

(c) primero convierto el ángulo a radianes: $780°.\frac{\pi}{180} = 13{,}6\,rad$. Reemplazo en la expresión de la velocidad angular para despejar el tiempo:

$V = \omega \cdot R$
$A_c = \omega^2 \cdot R$
$A_c = \frac{|V^2|}{R}$

$$\omega = \frac{\Delta\alpha_{(rad)}}{\Delta t} \xrightarrow{despejo} \Delta t = \frac{\Delta\alpha_{(rad)}}{\omega t} = \frac{13{,}6}{2{,}2\,\frac{1}{s}} = 6{,}19\ s$$

(d) para efectuar doce vueltas el tiempo demorado se puede sacar multiplicando por 12 al período (que es el tiempo en dar *vuelta*). Esto se puede hacer porque el movimiento es uniforme. También se puede sacar el ángulo que gira al hacer doce vueltas, multiplicando por 12 el ángulo de 1 vuelta ($2\pi = 6{,}283$). Y con ese ángulo, proceder como en el punto anterior. En ambos casos, el tiempo obtenido es 34,3 s.

Δ acel. constante.

(e) En el movimiento circular uniforme la velocidad tiene módulo constante y se calcula:

$$v = \omega . R = 2{,}2\ \tfrac{1}{s} . 1m = 2{,}2\ \tfrac{m}{s}$$

Vel. angular

En tanto, para la aceleración, la única componente que existe es la centrípeta (apunta hacia el centro, en la dirección radial). Esto es así porque no cambia el módulo de la velocidad (es bueno que leas la explicación de abajo). Esta componente la saco con la expresión: $a_c = \omega^2 . R = 4{,}84\ \frac{m}{s^2}$

aceleración centrípeta.

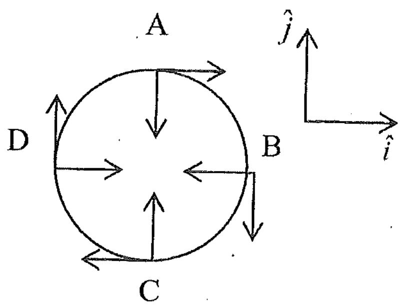
Ahora que tenemos los módulos de estos vectores, los dibujo en un gráfico para orientarme, en los cuatro puntos de intersección con los ejes. Marco la velocidad tangente a la circunferencia, y la aceleración hacia el centro. Recordá además que para darle el sentido al vector velocidad, el cuerpo gira en el sentido de las agujas del reloj. Como se ve en el dibujo, tenemos:

A: $\vec{v} = 2{,}2\frac{m}{s}\hat{i}$; $\vec{a} = -4{,}84\frac{m}{s^2}\hat{j}$

B: $\vec{v} = -2{,}2\frac{m}{s}\hat{j}$; $\vec{a} = -4{,}84\frac{m}{s^2}\hat{i}$

C: $\vec{v} = -2{,}2\frac{m}{s}\hat{i}$; $\vec{a} = 4{,}84\frac{m}{s^2}\hat{j}$

D: $\vec{v} = 2{,}2\frac{m}{s}\hat{j}$; $\vec{a} = 4{,}84\frac{m}{s^2}\hat{i}$

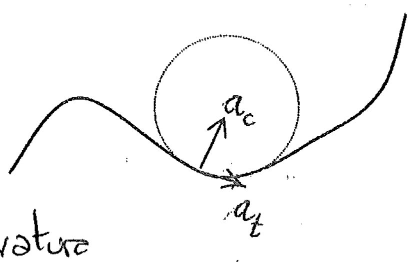


Coordenadas intrínsecas

Vimos que el vector velocidad es tangente a la trayectoria en todo punto. Referido al vector aceleración se puede demostrar que presenta en general dos componentes, una tangencial a la trayectoria y otra normal a la misma. Estas dos componentes se relacionan con los cambios en la velocidad de la siguiente manera:

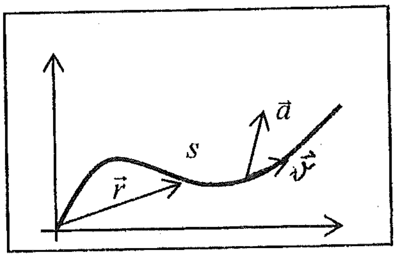
- la tangencial a_t es la responsable del cambio del módulo de la velocidad: $a_t = \frac{d|v|}{dt}$
- la centrípeta a_c es la responsable del cambio de dirección del vector velocidad: $a_c = \frac{|v|^2}{R}$

Δ Radio de curvatura en el punto.



Donde R es el radio de curvatura que tiene la curva en ese punto (es decir si en el punto se toma la circunferencia tangente que mejor ajusta la curva, R es el radio de la misma). Como vemos, la primera componente es la que asociamos en la vida cotidiana con la aceleración, ya que nos da el cambio de rapidez. Pero no hay que olvidarse de la otra, ya que modificar un vector velocidad también puede ser cambiar su dirección.

Los problemas que estudiamos en cinemática son movimientos rectilíneos. Pero es fácil entender que muchas de las cosas que hemos planteado son fáciles de generalizar para una trayectoria curva, olvidándonos de la curvatura, y pensando a "x" como la variable que nos marca la posición o desplazamiento sobre la trayectoria. Así, por ejemplo, un auto que viaja por una ruta de manera tal que su velocímetro marca siempre la misma rapidez, puede plantearse con las ecuaciones del MRU, aunque la trayectoria no sea recta. Pero, como futuros ingenieros, debemos hacer un estudio más riguroso. Se toma una coordenada curvilínea "s" (llamada "intrínseca") que designa la posición sobre la trayectoria curva. La rapidez o velocidad escalar "v" sobre la misma es el módulo del vector velocidad (es lo indicado por el velocímetro del coche). Y la aceleración escalar "a" es la componente tangencial del vector aceleración. Es decir, para describir el movimiento sobre la curva se puede usar estas tres magnitudes escalares, cuya relación con las vectoriales es la siguiente:

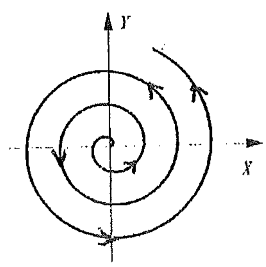


- s no tienen ninguna relación con el vector posición $\vec{r}$
- v es el módulo del vector velocidad $\vec{v}$
- a es la componente tangencial del vector aceleración $\vec{a}$

8. Suponer que un objeto sigue una trayectoria en espiral mientras viaja con una velocidad de módulo constante (ver figura). ¿Es constante la velocidad del objeto? ¿Es constante su aceleración? Si el módulo de su aceleración no es constante, ¿aumenta o disminuye?

La respuesta a la primera pregunta es que el ***vector velocidad no es constante***, por ser tangente a la trayectoria todo el tiempo cambia de dirección. La teoría sobre el vector aceleración del cuadro anterior nos dice que la aceleración tiene en general dos componentes. En este caso particular en que el módulo del vector velocidad no cambia, la componente tangencial a_t se anula.

Pero la otra componente ***no***, su valor es: $a_c = \frac{|v|^2}{R}$. En esta expresión vemos que en el numerador $|\vec{v}|$ no cambia, lo dice el enunciado. Pero en el divisor, el radio de curvatura a medida que nos alejamos en la espiral va aumentando. Así, este cociente disminuye al alejarnos, y la aceleración disminuye.



9. (a) Encuentre el radio de curvatura del punto más alto de la trayectoria de un proyectil disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal. (Sugerencia: en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración vertical). b) Repita el cálculo para los siguientes datos: $\alpha = 30°$ $v_o = 10$ m/s. (c) Con los datos del proyectil calcule el radio de curvatura cuando está en la mitad de altura al subir y al bajar, demuestre que dichos radios son iguales.

Para usar los conceptos aprendidos sobre la aceleración en el cuadro de coordenadas intrínsecas, vamos a pensar que en una trayectoria curva, como es la parábola del Tiro Oblicuo, el vector aceleración se puede descomponer en dos componentes:

(♙) la que apunta en la dirección de la velocidad (o sea la tangencial), que es la responsable de que cambie el módulo de la velocidad.

(♙ ♙) la que es perpendicular a la velocidad (llamada centrípeta), que es la responsable de que cambie la dirección de la velocidad, y cuyo valor se relaciona con ella por la expresión $a_c = \frac{v^2}{R}$. Esta expresión que tenemos conocida del Movimiento Circular vale para cualquier trayectoria curva, interpretando a "R" como el radio de curvatura instantáneo de la "curva-trayectoria".

Trabajando en coordenadas cartesianas tenemos conocidas las dos componentes del vector velocidad y del vector aceleración. Los módulos de ambos pueden obtenerse mediante el Teorema de Pitágoras:

$$|v| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \quad \text{y} \quad |a| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

Para obtener el radio de curvatura se necesita conocer las componentes de la aceleración sobre la tangente y la normal a la trayectoria. Para la primera, podemos usar la forma de proyectar que vimos en Álgebra 1, usando que el versor tangente tiene el sentido del vector velocidad:

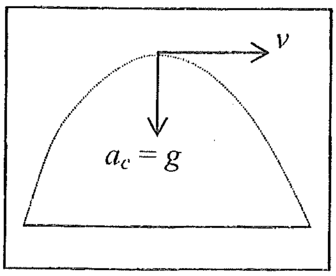
modulo de ~~velocidad~~ aceleración Por versor velocidad

$$a_t = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{v}|}$$ ("." Es el producto escalar)

Y la otra componente, sale de Pitágoras: $a^2 = (a_c)^2 + (a_t)^2 \rightarrow |a_c| = \sqrt{a^2 - (a_t)^2}$

Con esta componente conocida, el radio de curvatura se despeja de $a_c = \frac{v^2}{R}$

En el problema del Tiro Oblicuo, sabemos que la aceleración es la gravedad y que en el punto de mayor altura esta aceleración es perpendicular a la velocidad. Por lo tanto, las componentes de la aceleración en el sentido de la velocidad y perpendicular a ella son muy fáciles de sacar en dicho punto: $a_c = g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$; $a_t = 0$



Para los datos del problema, en el punto de altura máxima, es la componente en el eje x de la velocidad inicial del Tiro, es decir: $v = v_{o,x} = v_o.\cos(\alpha) = 10\frac{m}{s}.\cos(30°) = 8{,}66\ \frac{m}{s}$

Reemplazando en la expresión de la componente centrípeta de aceleración:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{despejo} R = \frac{(8{,}66\frac{m}{s})^2}{9{,}8\frac{m}{s^2}} = 7{,}65\,m$$

Este es el valor del radio de curvatura que tiene la parábola en el punto más alto (por favor, no confundir con ninguna otra cosa: no es la altura máxima, ni lo recorrido sobre la parábola).

(c) este punto se complica más, porque vamos a tener que descomponer el vector aceleración para sacar que parte proyecta sobre la dirección tangente y radial. Primero calculemos la altura máxima que alcanza el cuerpo. Para eso usamos la ecuación complementaria sobre el eje y:

$$(v_{f,Y})^2 - (v_{o,Y})^2 = 2.a.\Delta y \xrightarrow{reemplazo} 0 - (v_o.sen(30))^2 = 2.(-9{,}8\tfrac{m}{s^2}).\Delta y$$

Reemplazando el dato de la velocidad inicial, sacamos $\Delta y = \frac{25}{19{,}6} = 1{,}28\,m$. A continuación busquemos la velocidad que tiene cuando su altura es la mitad de la máxima (es decir la mitad de la hallada: 0,64 m). Para no complicarnos la vida, la componente y de esa velocidad la saco con la ecuación complementaria:

$$(v_{f,Y})^2 - (v_{o,Y})^2 = 2.a.\Delta y \xrightarrow{reemplazo} (v_{f,Y})^2 - (5)^2 = 2.(-9{,}8\tfrac{m}{s^2}).0{,}64m$$

De aquí despejamos: $v_y = \sqrt{25 - 12{,}5} \cong 3{,}53\frac{m}{s}$. La componente horizontal del tiro oblicuo nunca cambia, por lo tanto la conocemos: $v_x = v_{o,x} = 8{,}66\frac{m}{s}$

Saquemos el módulo del vector, sumando con Pitágoras: $|v| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = 9{,}35\frac{m}{s}$

Ahora, usamos las expresiones que dimos para proyectar sobre el eje tangente y normal a la curva:

La gravedad en coordenadas cartesianas

$$a_t = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(0; -9{,}8)\,.\,(8{,}66\,;3{,}53)}{9{,}35} = \frac{-34{,}6}{9{,}35} = -3{,}7\frac{m}{s^2}$$

Y de la relación de Pitágoras: $a_c = \sqrt{a^2 - (a_t)^2} = \sqrt{(9{,}8)^2 - (-3{,}7)^2} \cong 9{,}1\ \frac{m}{s^2}$

Finalmente:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{\text{despejamos}} R = \frac{v^2}{a_c} = \frac{(9{,}35)^2}{9{,}1} \cong 9{,}63\ m$$

Nos queda justificar que los radios de curvaturas son iguales, tanto cuando pasa subiendo como bajando. Y eso se puede justificar de dos formas: 1) por la simetría de la parábola, para puntos simétricos de la misma habrá radios iguales; 2) las cuentas que llevamos a cabo son idénticas para los dos puntos: dan las mismas componentes de velocidad, ángulo "α" y entonces se repite el radio.

Fórmula del radio de curvatura para una trayectoria $y(x)$

Otra forma de resolver este punto es si conocemos la ecuación de la trayectoria $y_{(x)}$. En ese caso el radio de curvatura en cada punto se puede calcular con la fórmula:

$$R = \frac{\left(1 + y'^{\,2}_{(x)}\right)^{3/2}}{\left|y''_{(x)}\right|} \qquad (♘)$$

En nuestro caso, la ecuación de la trayectoria la sacamos de las ecuaciones horarias del Tiro:

$$\begin{cases} x = 8{,}66.t \\ y = 5.t - 4{,}9.t^2 \end{cases} \xrightarrow{t = \frac{x}{8{,}66}} y = 5.\left(\frac{x}{8{,}66}\right) - 4{,}9\left(\frac{x}{8{,}66}\right)^2 = 0{,}577.x - 0{,}0653.x^2$$

Derivo esta expresión: $\quad (♙) \quad y' = 0{,}577 - 0{,}131.x \;\rightarrow\; y'' = -0{,}131$

Como ya sacamos $y_{\text{máx}} = 1{,}28\ m$, en la mitad de esa altura reemplazo para la trayectoria:

$$0{,}64 = 0{,}577.x - 0{,}0653.x^2 \;\rightarrow\; 0{,}0653.x^2 - 0{,}577.x + 0{,}64 = 0 \xrightarrow{\text{cuadrática}} \begin{cases} x_1 \approx 1{,}30 \\ x_2 \approx 7{,}54 \end{cases}$$

Reemplazando en (♙) y (♘) con el primero de estos valores:

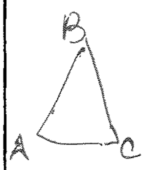
$$y' \approx 0{,}407 \quad , \quad y'' = -0{,}131 \xrightarrow{\text{en }(♘)} R \approx 9{,}6\ m$$

Coincide con el resultado obtenido con razonamientos físico.

Movimiento Relativo y Transformaciones de Galileo

Estas transformaciones relacionan la velocidad que se observan en dos sistemas de referencia distintos, con movimiento relativo entre ellos. Usando la notación: $v_{A,B}$ (significa la velocidad del móvil A, visto desde el sistema de referencia fijo al objeto B), tenemos:

MOV. RELATIVO.



- la primera transformación dice que para tres objetos A, B y C se cumple: $v_{A,B} = v_{A,C} + v_{C,B}$

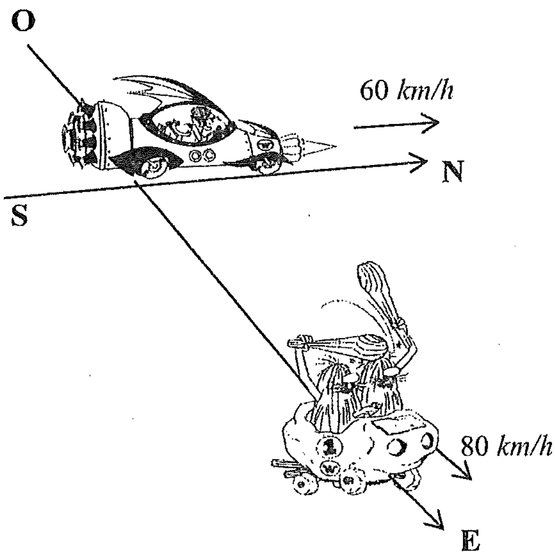
Es muy importante recordar que la relación está bien escrita cuando el primer subíndice del lado izquierdo coincide con el primero del lado derecho (en nuestro caso el A). Lo mismo debe ocurrir con el último de cada lado (B) y con el intermedio del lado derecho (C): AB = AC+CB

- la segunda transformación dice: $v_{A,B} = -v_{B,A}$

Por último, la primera transformación es una suma de vectores. Por eso en la materia se hace hincapié en usar los versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ para escribirlas. No vaya a ser cosa que alguien sume dos velocidades que no están sobre el mismo eje, ¿OK?

10. Dos automóviles que se mueven a lo largo de carreteras perpendiculares se desplazan hacia el norte y hacia el este, respectivamente. (a) si sus velocidades con respecto al suelo son de 60 km/h y 80 km/h, calcule sus velocidades relativas. (b) ¿La velocidad relativa, en este caso, depende de la posición de los coches en sus respectivas carreteras? Justifique la respuesta. (c) Repita el problema suponiendo que el segundo auto se desplaza hacia el oeste.

(a) hago un esquema de los dos coches vistos desde arriba. Las velocidades de los mismos, referida a tierra, se puede poner como:



$$v_{2,T} = 80\,\tfrac{km}{h}.\hat{\imath} \qquad v_{1,T} = 60\,\frac{km}{h}.\hat{\jmath}$$

La relación entre las velocidades relativas se puede sacar escribiendo la transformación de Galileo:

Ver relación de los subíndices

$$v_{2,T} = v_{2,1} + v_{1,T} \quad \rightarrow \quad v_{2,1} = v_{2,T} - v_{1,T} =$$

$$= 80\,\frac{km}{h}.\,\hat{\imath} - 60\,\frac{km}{h}.\,\hat{\jmath}$$

Esta es la velocidad del auto 2, vista desde el sistema de referencia fijo al primer auto. Como expresa la segunda transformación de Galileo, la inversa es contraria:

$$v_{1,2} = -v_{2,1} = -80\ \tfrac{km}{h}.\ \hat{\imath} - 60\ \tfrac{km}{h}.\ \hat{\jmath}$$

(b) estas velocidades no dependen de la posición de los autos en la carretera, sólo dependen de que se mantenga el módulo y el sentido en que se desplazan los autos.

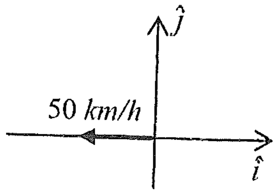
(c) si el segundo auto se desplaza al oeste, entonces tendremos los siguientes cambios:

$$v_{2,T} = -80\ \tfrac{km}{h}.\ \hat{\imath} \quad ; \quad v_{2,1} = v_{2,T} - v_{1,T} = -80\ \tfrac{km}{h}.\ \hat{\imath} - 60\ \tfrac{km}{h}.\ \hat{\jmath}$$

11. Un bote se mueve en dirección NO, 60° medidos del N al O a 40 km/h en relación con el agua. La corriente se encuentra en dirección y sentido tales que el movimiento resultante con relación a la tierra es hacia el oeste a 50 km/h. Calcule la velocidad y el sentido de la corriente con respecto a tierra.

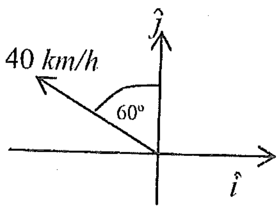
Primero escribo vectorialmente los datos del problema:

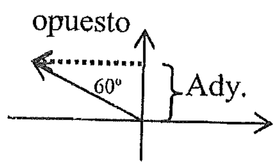
- "el movimiento resultante del bote respecto a tierra es 50 km/h hacia el oeste":



$$v_{B,T} = -50\ km/h\ \hat{\imath}$$

- "la velocidad del bote respecto al agua es de 40 km/h, y forma 60° del Norte hacia el oeste". Este vector lo represento en el dibujo, y lo descompongo con trigonometría sobre los versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$.





Hay un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es la velocidad relativa al agua de 40 km/h. Su cateto opuesto es la componente hacia el oeste, y su adyacente es la componente hacia el norte.

Usando las relaciones trigonométricas fundamentales:

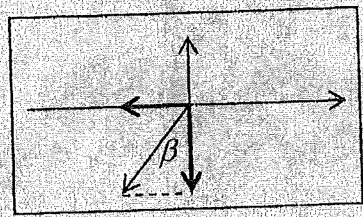
$$sen(60°) = \frac{opuesto}{hip} \quad \rightarrow \quad opuesto = 40\tfrac{km}{h}.\ sen(60°) = 34{,}6\tfrac{km}{h}$$

$$\cos(60°) = \frac{ady}{hip} \quad \rightarrow \quad ady = 40\tfrac{km}{h}.\ \cos(60°) = 20\tfrac{km}{h}$$

Usando los versores, esta velocidad se expresa: $v_{B,A} = -34{,}6\ km/h\ \hat{\imath} + 20\ km/h\ \hat{\jmath}$. El signo menos de la componente horizontal es porque esta componente es opuesta al versor $\hat{\imath}$. Con las expresiones vectoriales las dos velocidades conocidas del enunciado, uso la Transformación de Galileo:

$$v_{B,T} = v_{B,A} + v_{A,T} \xrightarrow{despejo} v_{A,T} = v_{B,T} - v_{B,A} = -15{,}4\ km/h\ \hat{\imath} - 20\ km/h\ \hat{\jmath}$$

Esta es la velocidad de la corriente del río vista desde el sistema fijo a tierra. Si quiero calcular la velocidad resultante a partir de las componentes, uso Pitágoras:



$$|v| = \sqrt{(-15{,}4)^2 + (-20)^2} \cong 25{,}2\ km/h$$

Y en cuanto a su sentido, podemos determinar (por ejemplo) su ángulo respecto al Sur:

$$sen(\beta) = \frac{op}{hip} = \frac{15{,}4}{25{,}2} = 0{,}61 \rightarrow \beta \cong 37{,}7^\circ$$

Contestamos entonces que el agua se mueve con una velocidad de 25,2 *km/h*, en sentido sudoeste, formando 37,7 ° del Sur hacia el Oeste.

12. Un río fluye hacia el Norte con una velocidad de 3 km/h. Un bote se desplaza hacia el este con una velocidad de 4 km/h con respecto al agua. (a) Calcule la velocidad del bote en relación con la orilla. (b) Si el río tiene 1 km de ancho, calcule el tiempo necesario para cruzarlo. (c) ¿Cuál es la desviación del bote hacia el Norte cuando llega al lado opuesto del río?

Escribamos los datos:

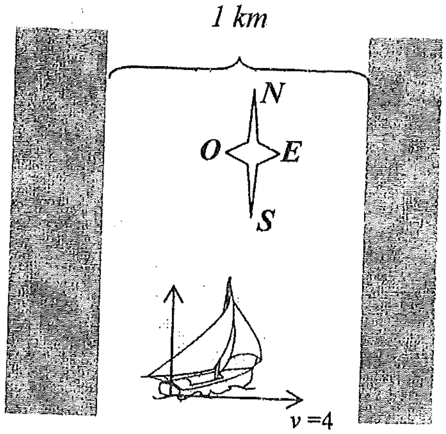
- la velocidad del río (respecto a tierra) es 3 *km/h* hacia el Norte: $v_{A,T} = 3\ km/h\ \hat{\jmath}$
- la velocidad del bote respecto del agua es 4 *km/h* hacia el este": $v_{B,A} = 4\ km/h\ \hat{\imath}$

Debemos calcular la velocidad del bote respecto a la orilla (o sea respecto al sistema fijo a tierra). Usamos la Transformación de Galileo:

Ver con cuidado la relación de los subíndices

$$\overbrace{v_{B,T} = v_{B,A} + v_{A,T}} = 4\ km/h\ \hat{\imath} + 3\ km/h\ \hat{\jmath}$$

Esta es la primera respuesta. Podemos calcular la velocidad resultante usando Pitágoras para sumar las componentes (ver ejercicio anterior), pero *también es correcta* esta respuesta (está escrita en forma vectorial). El bote se está desplazando visto desde tierra, con una velocidad de 4 *km/h* hacia el este y una de 3 *km/h* hacia el norte.



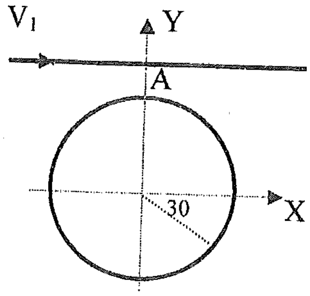
(b) el río tiene un ancho entre sus orillas de 1 *km*, como dice el enunciado. El movimiento del bote se puede pensar como la "composición" de dos MRU: uno de velocidad 4 *km/h* hacia el este y otro de 3 *km/h* hacia el norte. Para cruzar de una orilla a la otra (es el desplazamiento de Oeste a Este), usa la de 4 *km/h*. De la ecuación del MRU:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{1\ km}{4\ km/h} = 0{,}25\ h$$

(c) En este intervalo el bote también se estaba moviendo hacia el Norte. En esa dirección también hace un MRU, por lo tanto para este eje, en este tiempo tenemos:

$$\Delta y = v_y.\Delta t = 3\ km/h.0{,}25\ h = 0{,}75\ km$$

Este es el desplazamiento del bote hacia el Norte por culpa de la corriente del río.

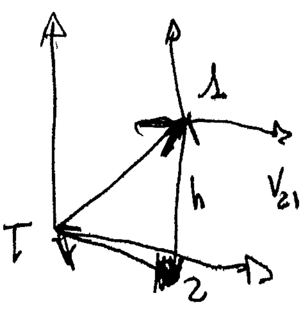


13. Sobre una superficie plana horizontal el móvil 1 realiza un MRU tal que V_1=12 m/s. Otro móvil 2 realiza un MCU de $w = 2\ s^{-1}\ k$ sobre una circunferencia de radio 1 metro. Te pedimos calcules:

a) velocidad relativa del móvil 1 respecto del 2, cuando este pasa por A y cuando pasa por B

b) aceleración del móvil 2 cuando pasa por A, respecto del piso y respecto del móvil 1

Del móvil 2 que ejecuta el MCU puedo sacar el módulo de su velocidad, con la fórmula: $v = w\ .R = 2\frac{1}{s}.1\ m = 2\frac{m}{s}$. Para poder usar la trasformación de Galileo debemos darle a esta velocidad un carácter vectorial. Como el móvil 2 gira en sentido antihorario (ya que su velocidad angular apunta en el sentido de + z),

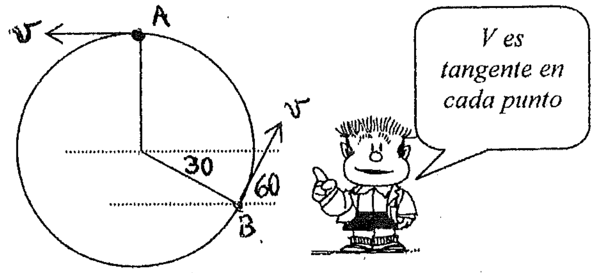


$V_{21} = V_{1T} + V_{2T}$

① en el punto A tiene $v = -\,2\frac{m}{s}\;\hat{\imath}$

② en el punto B la velocidad debe descomponerse con trigonometría:

$$v_2 = \underbrace{2\tfrac{m}{s}.\cos(60)\,\hat{\imath}}_{1\frac{m}{s}} + \underbrace{2\tfrac{m}{s}.sen(60)\,\hat{\jmath}}_{1{,}73\;\frac{m}{s}}$$



Observar que las dos componentes de la velocidad van en los sentidos positivos de cada eje. Otra forma de hallar la velocidad en forma vectorial, es con la expresión $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$

Para usar esta expresión hay que expresar al vector posición en forma vectorialmente correcta: $\vec{r}_A = 1m\,\hat{\jmath}$, mientras que $\vec{r}_B = 1\,m.\cos(30)\,\hat{\imath} - 1\,m.sen(30)\,\hat{\jmath}$

Así:

$$v_A = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2\frac{1}{s} \\ 0 & 1m & 0 \end{vmatrix} = -\,2\frac{m}{s}\hat{\imath}\ \checkmark \qquad v_B = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2\frac{1}{s} \\ 0{,}866m & -0{,}5\,m & 0 \end{vmatrix} = 1\frac{m}{s}\,\hat{\imath} + 1{,}73\frac{m}{s}\,\hat{\jmath}\ \checkmark$$

Pero vayamos al punto, hay que sacar la velocidad relativa, así que usemos la transformación de Galileo:

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_{1,T} + \vec{v}_{T,2} = \vec{v}_{1,T} - \vec{v}_{2,T} = \begin{cases} \circ\ A:\ +12\frac{m}{s}\hat{\imath} - (-2\frac{m}{s}\hat{\imath}) = 14\frac{m}{s}.\hat{\imath} \\ \circ\ B:\ +12\frac{m}{s}\hat{\imath} - (1\frac{m}{s}\hat{\imath} + 1{,}73\frac{m}{s}\hat{\jmath}) = 11\frac{m}{s}.\hat{\imath} - 1{,}73\frac{m}{s}\hat{\jmath} \end{cases}$$

b) la aceleración del móvil 2 (como tiene un MCU) es la centrípeta: $a_c = \omega^2.R = 4\frac{m}{s^2}$.

Para darle un carácter vectorial, observemos que como esta vector apunta hacia el centro de la circunferencia, en el punto A se tendrá: $a_A = -4\frac{m}{s^2}\;\hat{\jmath}$

Esta es entonces la aceleración del móvil 2 respecto a Tierra. Y respecto al móvil 1, podemos derivar la relación de Galileo:

$$\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_{2,T} + \vec{v}_{T,1} \xrightarrow{derivo} \vec{a}_{2,1} = \vec{a}_{2,T} + \vec{a}_{T,1} = \vec{a}_{2,T} - \vec{a}_{1,T} \xrightarrow{a_{1,T}=0} \vec{a}_{2,1} = \vec{a}_{2,T}$$

Es decir, como el móvil 1 tiene $a = 0$, la aceleración del móvil 2 respecto del 1 es la misma que respecto a Tierra (el móvil 1 es un sistema de referencia "inercial")

c) expresemos la coordenada "x" de la posición de cada uno en función del tiempo:

$$x_1 = 12\frac{m}{seg}.t \quad \text{(MRU)} \qquad \begin{cases} x_2 = R.\cos(\omega.t) = 1m.\cos(2.\frac{1}{seg}.t) \\ y_2 = R.sen(\omega.t) = 1m.sen(2.\frac{1}{seg}.t) \end{cases}$$

Para el móvil 2 lo que hicimos fue proyectar el radio sobre los ejes cartesianos. Para sacar la posición relativa del 2 respecto al 1, uso la relación de índices de las transformaciones de Galileo:

$$r_{2,1} = r_{2,T} - r_{1,T} = (1m\ \cos(2\frac{1}{seg}.t) - 12\frac{m}{seg}.t).\hat{i}\ + (1m\ sen(2\frac{1}{seg}.t) - 0).\hat{j}$$

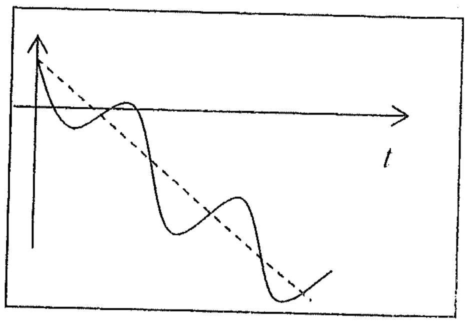
$$\xrightarrow{derivando} \quad v_{2,1} = (-2\frac{m}{seg}\ sen(2\frac{1}{seg}.t) - 12\frac{m}{seg}).\hat{i}\ + 2\frac{m}{seg}\cos(2\frac{1}{seg}.t).\hat{j}$$

$$a_{2,1} = (-4\frac{m}{seg^2}\cos(2\frac{1}{seg}.t) - 0).\hat{i}\ - 4\frac{m}{seg^2}\ sen(2\frac{1}{seg}.t).\hat{j}$$

c_2) Finalmente, para hacer el gráfico de la coordenada "x" de la posición relativa, se puede estudiar la forma de la expresión que acompaña al versor $\hat{i}$ en la posición relativa, pero es más fácil pensar cada gráfico por separado y luego superponer restando:

i) el del móvil ②: $x = 1m\ \cos(2\frac{1}{seg}.t)$, su forma es una función "ondita" que empieza en $x_o = 1$m

ii) el del móvil ①: $x = 12\frac{m}{seg}.t$ su forma es una recta que empieza en $x_o = 0$



La resta nos da la "ondita" del coseno que desciende superpuesta a la recta

14. Se conocen algunos datos acerca de un movimiento en el plano:

v_x=2.t - 4 ; $a_y = 2.t$; $v_o = 5$ m/s ; $x_o = 4$ m ; $y_o = -3$ m

Considere que t se mide en segundos, x e y en metros. (a) Complete la información faltante. (b) Dibuje las dos trayectorias compatibles con los datos iniciales (c) Dibuje en la trayectoria los vectores velocidad y aceleración para t = 2 s y t = 3 s. (d) Calcule en dichos instantes el radio de curvatura. (e) Si el cuerpo tiene masa 2 kg ¿qué fuerza neta actuaría sobre él (exprésela utilizando versores)?

Completemos la información: $v_x = 2.t - 4 \xrightarrow{derivo} a_x = 2$

$$v_x = 2.t - 4 \xrightarrow{Integro} x = t^2 - 4.t + C \xrightarrow{uso\ \ x_0=4} x = t^2 - 4.t + 4$$

Con esto completamos la información de la coordenada "x". Para hacer lo propio con la coordenada "y" necesitamos despejar de la condición de la velocidad inicial:

$$v_0 = \sqrt{(v_{ox})^2 + (v_{oy})^2} \rightarrow 5 = \sqrt{\underbrace{(-4)^2}_{V_x \text{ cuando } t=0} + (v_{oy})^2} \xrightarrow{despejo} |v_{oy}| = 3$$

Aquí hay dos posibles casos (por eso el enunciado habla de dos trayectorias posibles). Vamos a tomar un caso ($v_{o,y} = 3$ m/s), el otro es análogo. Tenemos:

$$a_y = 2.t \xrightarrow{Integro} v_y = t^2 + C \xrightarrow{condición\ \ inicial\ \ v_{o,y}=3} v_y = t^2 + 3$$

Y volviendo a integrar:

$$v_y = t^2 + 3 \xrightarrow{Integro} y = \frac{1}{3}.t^3 + 3.t + C \xrightarrow{y_o=-3} y = \frac{1}{3}.t^3 + 3.t - 3$$

Los gráficos pedidos no vale la pena hacerlos, porque sólo se trata de algo cualitativo que no aporta a nuestro conocimiento. Sigamos con el cálculo del radio de curvatura, para lo cual usamos el procedimiento del ejercicio 9.

Empecemos con $t = 2$. Reemplazo este tiempo en las ecuaciones que encontramos:

$$v_x = 2.t - 4 = 0 \ ; \ v_y = t^2 + 3 = 7 \rightarrow |v| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7$$

$$a_x = 2 \ ; \ a_y = 2.t = 4 \rightarrow |a| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

Sacamos la componente tangencial de la aceleración: $a_t = \dfrac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{(2;4).(0;7)}{7} = \dfrac{28}{7} = 4$

Y por lo tanto, la componente centrípeta es: $a_c = \sqrt{a^2 - (a_t)^2} = \sqrt{20 - (4)^2} = 2 \frac{m}{s^2}$

Finalmente: $a_c = \dfrac{v^2}{R} \xrightarrow{despejamos} R = \dfrac{v^2}{a_c} = \dfrac{(7)^2}{2} = 24{,}5\,m$

De la misma forma, para t = 3 s tenemos:

$$|v| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{148}\,\frac{m}{s}$$

$$|a| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}\,\frac{m}{s^2}$$

Saco la componente tangencial:

$$a_t = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2;6).(2;12)}{\sqrt{148}} \cong \frac{76}{12{,}17} = 6{,}25\,\frac{m}{s^2}$$

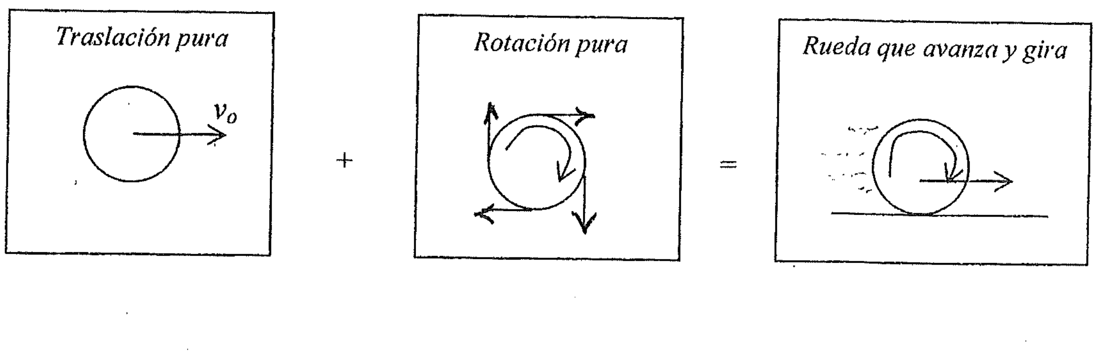
Y la componente centrípeta es: $a_c = \sqrt{a^2 - (a_t)^2} = \sqrt{40 - (6{,}25)^2} \cong 0{,}97\,\frac{m}{s^2}$

Finalmente: $a_c = \dfrac{v^2}{R} \xrightarrow{despejamos} R = \dfrac{v^2}{a_c} = \dfrac{(\sqrt{148})^2}{0{,}97} = 152\,m$

(e) la fuerza neta (o resultante) es variable con el tiempo (como la aceleración); y la despejo de la 2da ley de Newton: $\vec{F}_{neta} = M.\vec{a} = 2\,kg.\,(2\,;\,2.t) = (4\,;\,4.t) = 4.\,\hat{i} + 4.t.\hat{j}$

15. Una llanta de radio R rueda con velocidad constante v_o a lo largo de un plano horizontal. (a) Verifique que la posición de un punto de su borde, inicialmente en 0, está dada por las ecuaciones $x = R.(wt\text{-}sen(wt))$ e $y = R.(1\text{-}cos(wt))$, donde $w = v_o/R$ es la velocidad angular de la llanta y t se mide desde el instante en que el punto está inicialmente en contacto con el plano. (b) Halle las componentes de la velocidad y de la aceleración del punto. (c) Dibuje la velocidad y la aceleración del punto

Este ejercicio es muy importante por dos motivos: nos adelanta algunas cosas sobre el tema más difícil (cuerpo rígido). Y además nos permite ejercitar las técnicas del análisis y sus aplicaciones físicas. Empecemos por justificar las ecuaciones. Para eso vamos a aceptar un resultado que en la parte de cuerpo rígido usaremos mucho: el movimiento de un cuerpo rígido se puede considerar como la composición de dos movimientos: una traslación pura de todos sus puntos con la misma velocidad v_o para todos más un giro alrededor de su centro.



Además de este resultado, vamos a usar otro más: el punto P donde la llanta toca el piso tiene una velocidad total que es la suma de la traslación más la que corresponde por el giro. Si miramos con cuidado, estas dos velocidades **son opuestas**, ya que la velocidad tangencial del giro en ese punto tiene sentido hacia atrás (ver dibujo en la rotación pura). Por lo tanto, efectuar la suma vectorial corresponde en realidad a hacer una resta:

$$v_P = \vec{v}_o + \vec{v}_{giro} = + \, v_o - \omega.R$$

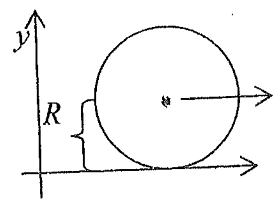
Una condición habitual en los giros es que el punto P de contacto tiene en total velocidad 0. Esto se expresa en el enunciado diciendo que el cuerpo no desliza sobre el piso. Es como en la acción de caminar, mientras que toda la persona avanza, el punto de contacto con el piso (el pie que pisa) no tiene velocidad, por eso deja una huella de la suela sobre un piso arenoso y no una patinada.

En el cuerpo rígido, esto nos da una condición muy popular (llamada de rodadura), como el punto de contacto debe tener velocidad nula ($v_p = 0$) para que la llanta no patine, entonces:

$$v_P = 0 = + \, v_o - \omega.R \quad \rightarrow \quad v_o = \omega.R$$

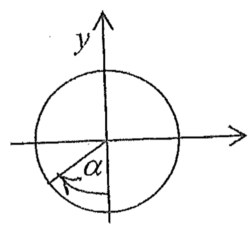
Bueno, luego de estos comentarios que nos servirán de introducción al tema cuerpo rígido, digamos que el movimiento de un punto se puede poner, como ya dijimos, como la suma de una traslación pura de velocidad v_o ***más*** el de giro con velocidad angular ω respecto del centro:

- para la traslación del centro de la llanta, su coordenada y no cambia, mientras que en el eje x avanza con un MRU



$$y = R \quad ; \quad x = v_o \cdot t$$

- para el giro respecto al centro, debemos descomponer el radio sobre los ejes usando el ángulo α (lo medimos desde el piso porque recordemos que P arranca desde el origen)



$$y = -R.cos(\alpha) \quad ; \quad x = -R.\,sen\alpha$$

Donde el ángulo α varía con el tiempo según la ecuación del MCU:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \xrightarrow{despejo} \alpha = \omega.t$$

Ya casi hemos terminado, basta sumar las coordenadas del movimiento de traslación con las de rotación, y usar la condición de rodadura:

$$x = v_o.t - R.sen(\omega.t) = \omega.R.t - R.sen(\omega.t) = R.(\omega.t - sen(\omega.t))$$

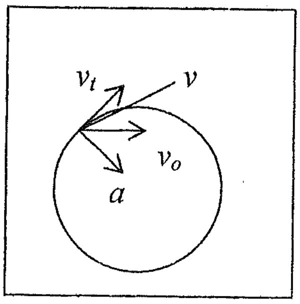
Mientras que: $$y = R - R.\cos(\omega.t) = R.(1-\cos(\omega.t))$$

(b) las componentes de la velocidad y la aceleración se sacan derivando respecto al tiempo:

$$v_x = x' = \omega.R - \omega.R.\cos(\omega.t) \quad \text{y} \quad a_x = x'' = \omega^2.R.sen(\omega.t)$$

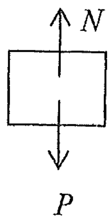
$$v_y = y' = \omega.R.sen(\omega.t) \quad \text{y} \quad a_y = y'' = \omega^2.R.\cos(\omega.t)$$

(c) Para dibujar estos vectores en un punto, seguimos con el concepto de sumar los movimientos superpuestos. Para la velocidad, debemos sumar la de traslación v_o con la de rotación (la velocidad tangencial es $\omega.R$, y por la condición de rodadura tiene el mismo módulo que v_o). Para la aceleración, como la traslación es uniforme y no tiene aceleración, sólo tenemos la centrípeta que corresponde al giro. Gráficamente es algo de este estilo.



16. Para cada una de las siguientes situaciones: a) dibujar el diagrama de cuerpo libre b) explicitar los pares de acción y reacción para cada una de las fuerzas actuantes, c) calcular la normal para cada cuerpo.

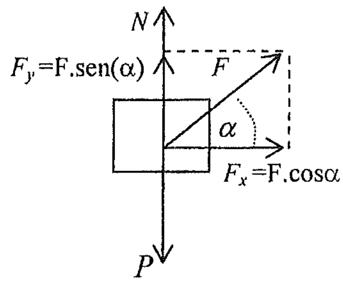
Atención: Para despejar la Normal, trabajaremos con la ecuación de Newton sobre el eje y, el perpendicular a la superficie. Sobre este eje en ninguno de los casos el cuerpo tiene aceleración. Por lo tanto, usaremos para todos los casos que $a_y = 0$. Sobre el otro eje, puede ocurrir o no que hubiera rozamiento, y que el cuerpo se acelere. Como el enunciado no aclara nada sobre este asunto, y no lo necesitamos saber (sólo queremos la Normal, y nada nos importa sobre el eje x), los diagramas de cuerpo libre que vamos a hacer son "estimativos", es decir, si falta alguna fuerza no cambia el problema porque sería en todo caso sobre el eje x.



(i) planteo el diagrama.
Y de la 2da ley de Newton:

$$N - P = 0 \xrightarrow{despejo} N = m.g \checkmark$$

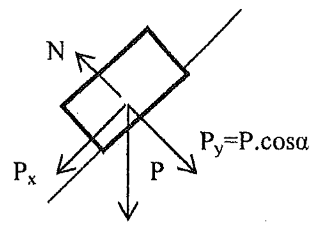
(ii) descompongo la fuerza F:



Planteo la 2da ley de Newton sobre el eje y:

$$N + F_y - P = 0 \xrightarrow{despejo} N = m.g - \text{F.sen}(\alpha) \checkmark$$

(iii) descompongo el Peso sobre el plano inclinado, como aprendimos en el CBC

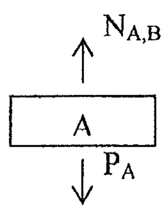


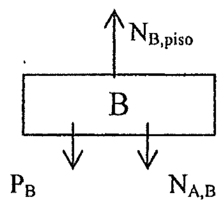
$P_y = \text{P.cos}(\alpha)$ $\quad$ $P_x = \text{P.sen}(\alpha)$

Planteo la 2da ley de Newton sobre el eje y:

$$N - P_y = 0 \xrightarrow{despejo} N = m.g.\cos(\alpha) \checkmark$$

(iv) hacemos los diagramas de los dos cuerpos. No debemos olvidarnos que la normal N_A es un par de interacción que tanto recibe el A como el B:



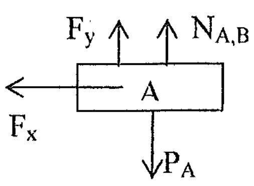


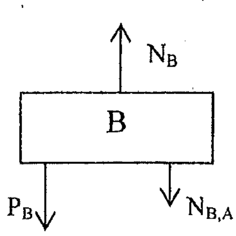
Planteo la 2da ley de Newton sobre el eje y, para ambos cuerpos, tomando sentido positivo hacia arriba:

$$N_A - P_A = 0 \xrightarrow{despejo} N_A = m_A.g \checkmark$$

$$N_B - N_A - P_B = 0 \xrightarrow{despejo} N_B = (m_A + m_B).g \checkmark$$

(v) la descomposición de la fuerza es idéntica al (ii) (le cambian la orientación al ángulo pero la componente vertical es la misma). Realizamos el diagrama de Cuerpo Libre para cada cuerpo, recordando que la normal N_A es un par de interacción que tanto recibe el A como el B:



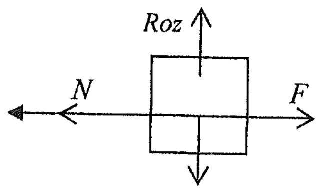


Planteo la 2da ley sobre el eje y, tomando sentido positivo hacia arriba:

$$N_A + F_y - P_A = 0 \xrightarrow{despejo} N_A = P_A - F_y = m_A.\mathrm{g} - F.\mathrm{sen}(\phi) \checkmark$$

$$N_B - N_A - P_B = 0 \xrightarrow{despejo} N_B = (m_A + m_B).g - F.sen(\phi) \checkmark$$

(vii) como la normal es perpendicular a la superficie de contacto, debe ser perpendicular a la pared. Por lo tanto, el diagrama de fuerzas con rozamiento es:



De la 2da ley de Newton sobre el eje horizontal:

$$N - F = 0 \xrightarrow{despejo} N = F \checkmark$$

Observación: en el caso en que no haya rozamiento, el cuerpo quedará con aceleración vertical ya que ninguna fuerza compensa al peso. Pero es claro que el valor de la Normal que despejamos no depende de eso.

En cuanto al punto b), los pares de interacción para cada caso es una fuerza de igual valor y opuesta a la normal, pero aplicada al cuerpo con el cual se encuentra en contacto. Sólo en los casos (iv) y (v) tenemos a la vista un par de interacción, las fuerzas que llamamos $N_{A,B}$ y $N_{B,A}$ (como corresponde, iguales, opuestas y una en cada cuerpo).

El impulso de una fuerza

Para los casos de fuerzas que duran poco tiempo, y que así resultan difíciles de medir, es conveniente recurrir a teoremas que vinculen sus efectos con los cambios en el estado del movimiento del cuerpo. El caso típico es el de un choque, donde las fuerzas son instantáneas. Se define el impulso de una fuerza a la integral temporal:

Impulso de una fuerza.

$$\vec{J} = \int_{t_o}^{t_f} \vec{F}\, dt \xrightarrow{caso\ \ F=cte} |J| = |F|.(t_f - t_o)$$

En algunos casos, se puede aproximar la fuerza aplicada al cuerpo, por una fuerza constante promedio que llamaremos "*fuerza media*".

Tenemos el siguiente Teorema (sin demostración): el impulso total recibido (o impulso de la fuerza resultante) sobre un cuerpo es igual a la variación de la cantidad "$m.v$".

Impulso total recibido

$$\vec{J}_{total} = m.v_f - mv_o$$

17. Un automóvil tiene una masa de 1500 kg y su velocidad inicial es de 60 km/h. (a) Cuando se le aplican los frenos, produciendo una desaceleración uniforme, el coche se detiene en 1,2 min. Determine la fuerza aplicada al coche. (b) Al chocar un auto se detiene en pocos segundos, por ejemplo en 0,5 segundos, recalcule ahora la fuerza (compare la fuerza calculada con su propio peso). A la luz de estos resultados analice lo peligroso que es chocar a esa velocidad.

Primero cambiemos de unidades al sistema MKS (el tiempo a segundos multiplicando por 60: $t = 72\ s$, y la velocidad a m/s dividiendo por 3,6). Aunque puedo trabajar por conceptos dinámicos y cinemáticos, resulta más corto de hacer usando la expresión que vimos en el cuadro de la página anterior:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_m.\Delta t \xrightarrow{despejo} \vec{F}_m = \frac{M.\vec{v}_f - M.\vec{v}_i}{72\ seg} = -347{,}2\ N$$

(b) cambiando el tiempo del divisor por $t = 0{,}5$ s resulta $F_M = 50000\ N$. Para una persona de 70 kg, su peso es de 700 N, y esta fuerza del choque es aproximadamente 70 veces mayor. Es decir, es como si recibiéramos el peso de 70 personas a la vez.

18. La fuerza ejercida sobre un objeto de masa m es $F = F_o - k.t$, donde F_o y k son constantes y t es el tiempo. Halle (a) la velocidad, (b) la aceleración y (c) la posición para cualquier tiempo. Analice: 1) cuáles son las condiciones iniciales que puede seleccionar, 2) en qué unidades puede medir las distintas magnitudes involucradas.

a) para calcular la velocidad puedo proceder como en el ejercicio anterior, es decir integrar la fuerza para sacar el impulso, y luego usar el Teorema de la variación de cantidad de movimiento:

$$I = \int_{t_o}^{t} F.dt = \int_{0}^{t} (F_o - kt)\,dt = F_o.t - \tfrac{1}{2}k.t^2$$

Igualamos a la variación de cantidad de movimiento y despejamos la velocidad:

$$m.v - m.v_o = F_o.t - \tfrac{1}{2}k.t^2 \xrightarrow{despejo} v = \frac{F_o.t - \frac{1}{2}k.t^2}{m} + v_o$$

b) Para calcular la aceleración se puede derivar respecto al tiempo la velocidad que calculamos en (a), pero es más fácil hacerlo a partir de la segunda ley de Newton:

$$F_{result.} = m.a \xrightarrow{despejo} a = \frac{F_o - k.t}{m}$$

c) para encontrar la posición en función del tiempo debemos integrar la función velocidad que encontramos en la parte (a) (observar que como la aceleración depende del tiempo, no se trata de un MRUV, por lo tanto **no** es ninguna de las ecuaciones horarias estudiadas en el CBC):

Plantear esto para integrar las ecuaciones a, v, x

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{paso de lado}} dx = \left(\frac{F_o.t - \frac{1}{2}k.t^2}{m} + v_o \right) dt \rightarrow$$

$$\int_{x_o}^{x} 1\, dx = \int_0^t \left(\frac{F_o.t - \frac{1}{2}k.t^2}{m} + v_o \right) dt$$

Del lado derecho separo la división e integro cada sumando respecto al tiempo. Del lado izquierdo, integramos respecto a "x":

$$x - x_o = \frac{F_o.}{2.m} t^2 - \frac{k}{6.m}.t^3 + v_o.t \xrightarrow{\text{despejo}} x = \frac{F_o.}{2.m} t^2 - \frac{k}{6.m}.t^3 + v_o.t + x_o$$

Ahora analizamos los dos últimos puntos: las condiciones iniciales que podemos seleccionar o que nos deben agregar son las dos constantes que aparecen al integrar en (a) y (c), es decir v_o y x_o. En cuanto a las unidades, se supone que son las "lógicas" para cada magnitud. De la igualdad $F = F_o - k.t$ vemos que para que el lado derecho tenga unidades de fuerza como el izquierdo, F_o debe tener unidades de fuerza, y "k" de fuerza sobre tiempo (por ejemplo *newton/seg*)

19. Una fuerza F se aplica durante $20s$ a un cuerpo de $500kg$ de masa. El cuerpo, inicialmente en reposo, adquiere una velocidad de 0,5 m/s como resultado del efecto de la fuerza. Si esta aumenta como $F(t) = A.t^3$ N/s^3 desde $0s$ durante los primeros $5s$, y después disminuye linealmente hasta cero en los siguientes $15s$, (a) halle el impulso causado por la fuerza sobre el cuerpo, (b) encuentre la fuerza máxima ejercida sobre el cuerpo y (c) haga una gráfica de F en función de t y halle el área bajo la curva. ¿El valor de esta área está de acuerdo con el resultado del inciso (a)?

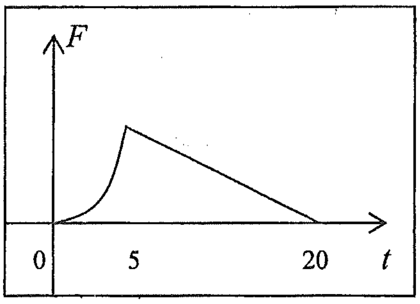
a) hay un cuerpo en equilibrio (suma de fuerzas nula), al que se le aplica una fuerza extra durante 20 s. Esa fuerza es la resultante (las otras se anulaban). Y se relaciona por la 2da ley de Newton con la aceleración, si integro la relaciono con la velocidad, que es el dato del problema. Tengo:

Planteo del impulso.

$$\sum F = m.a \rightarrow F = m.\frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{Integro}} \int_0^{20s} \vec{F}\, dt = m.\vec{v}_{(20s)} - \underbrace{m.\vec{v}_o}_{reposo\ =0} = 250 \text{ N.}s$$

Esta expresión se la conoce como 2da ley de Newton integral, del lado izquierdo está la integral de la resultante respecto al tiempo, del derecho la variación de cantidad de movimiento del cuerpo. La integral del lado izquierdo es la que conocemos como "Impulso" de la fuerza (en el CBC, la vimos en el capítulo de choque). Por la igualdad de arriba, puedo contestar que el impulso pedido vale 250 N.s

b) para encontrar el valor de la fuerza máxima vamos a tener que encontrar antes el valor de la constante A. Para eso llevo a cabo un gráfico de F en función del tiempo, empiezo con una cúbica creciente, hasta t = 5 s, y termino con una lineal que se anula en 20 s. El valor de la fuerza máxima en t = 5 s lo "saco" reemplazando en la expresión:



$$F_{(5s)} = A.(5s)^3 \ \text{N}/s^3 = 125.A \ \text{N}$$

La expresión de F para el intervalo de 5s a 20s la saco con la conocida ecuación de la recta que pasa por dos puntos: Recta q pasa por 2 puntos.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) \rightarrow \quad F = -\frac{25}{3s}.A.(t - 5s) \ \text{N} + 125.A \ \text{N}$$

Resuelvo la integral del impulso, separando en dos partes. Para hacerlo menos confuso aconsejo eliminar unidades, sacando los N y s. Yo las voy a dejar, pero exige estar más atento:

$$\int_0^{20s} \vec{F}\, dt = \int_0^{5s} \vec{F}\, dt + \int_{5s}^{20s} \vec{F}\, dt = \left(\tfrac{1}{4}.A.t^4 \ \tfrac{N}{s^3}\right)_0^{5s} + \left(-\tfrac{1}{2}.\tfrac{25}{3s}.A.(t-5s)^2.\text{N} + 125.A.t\,\text{N}\right)_{5s}^{20s}$$

$$\xrightarrow{Barrow} \int_0^{20s} \vec{F}\, dt = \left(\tfrac{625}{4}.A.\ \text{N}.s\right) + \left(\tfrac{1875}{2}.A\,\text{N}.s\right) = 1093{,}75\ A\ \text{N}.s$$

Como del a) tengo el valor del impulso, reemplazo: $1093{,}75\ A\ \text{N}.s = 250\ \text{N}.s \ \rightarrow \ A \approx 0{,}2286$

Entonces, la fuerza máxima vale: $F_{(5s)} = 125.A\ \text{N} = 28{,}6\ \text{N}$. El gráfico pedido ya lo hice, y para terminar, el valor del área en ese gráfico coincide con la integral definida de F (porque F >0) por lo tanto es también el impulso. Eso no nos sirve de gran cosa, porque para calcular el área o el impulso debo calcular la integral definida. Y para eso necesito haber encontrado la constante "A"

Sistemas no Inerciales

Un sistema Inercial es un sistema donde se cumple la 2da ley de Newton. Un Sistema no Inercial (o S.N.I.) es un sistema de referencia que se encuentra acelerado respecto a uno inercial, y por lo tanto no se cumple la segunda ley de Newton, es decir que si sumamos las fuerzas que el cuerpo recibe no coincide con el producto "$m.a$". La explicación de que esto ocurra es sencilla: en este sistema, la aceleración que vemos del cuerpo no es la "verdadera" (es decir, no es la que tiene el cuerpo vista desde un sistema inercial). En efecto, al estar nosotros mismos acelerados y tomarnos como referencia, la aceleración que percibimos del cuerpo está influida por nuestra propia aceleración. Por ejemplo, cuando viajamos en tren, la persona sentada a nuestro lado la vemos quieta. Pero la verdad es que si lo analizamos desde el piso, esa persona está moviéndose.

Para poder plantear la dinámica, *inventamos* una fuerza ficticia, que se suele llamar "*fuerza inercial*". Su valor es el producto de la masa del cuerpo por la aceleración que tiene el S.N.I. visto desde el S.I. (en general, el fijo a Tierra), y su sentido es opuesto a esta aceleración. En un S.N.I. la 2^{da} ley de Newton se escribe en

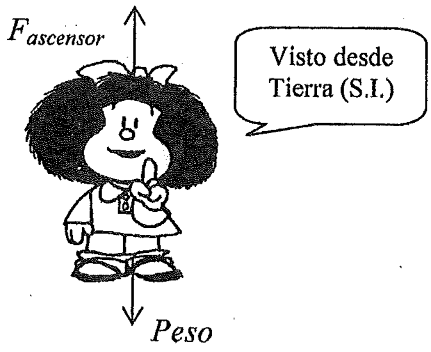
Sist. No inercial.

$$\sum \vec{F} + \vec{f}_{inercial} = m.\vec{a}_{SNI} \qquad \text{donde} \qquad \vec{f}_{inercial} = m.\vec{a}^{*}$$

Donde la sumatoria de fuerzas es la resultante de todas las verdaderas (es decir las que provienen de la interacción con otro cuerpo, y que tienen entonces un par de interacción). La fuerza $\vec{f}_{inercial}$ es la ficticia, que corrige el defecto de habernos subido a un sistema acelerado para ver las cosas. La aceleración $\vec{a}_{SNI}$ es la que tiene el cuerpo visto desde el S.N.I. que usamos para analizar el problema. Finalmente $\vec{a}^{*}$ no es la aceleración del cuerpo, sino la del S.N.I. visto desde el S.I.

20. Una persona cuya masa es de 60 kg se encuentra en un ascensor. Determine la fuerza que ejerce el piso sobre la persona cuando el ascensor: (a) sube con movimiento uniforme, (b) baja con movimiento uniforme, (c) baja y acelera hacia arriba a 3 m/s^2 (d) baja y acelera hacia abajo a 3 m/s^2 y (e) cuando se rompen los cables del ascensor

Primero planteamos el problema desde el S.I. fijo a Tierra. En todos los casos el diagrama de Cuerpo Libre contiene sólo dos fuerzas:



- El peso aplicado por la Tierra
- La fuerza del ascensor sobre la persona

Tomando sentido positivo hacia arriba:

$$F_{ascensor} - Peso = M \,.\, a$$

Ahora, para cada caso, reemplazamos la aceleración.

(a) como sube a velocidad constante, $a = 0$

$$F_{ascensor} - 588\,N = 0 \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = 588\,N$$

(b) baja también a velocidad constante ($a = 0$) vuelve a darnos la misma fuerza.

(c) aunque baje, la aceleración es hacia arriba. Reemplazo $a = + 3\ m/s^2$

$$F_{ascensor} - 588\,N = 60\ kg.3\frac{m}{s^2} \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = 768\,N$$

(d) esta vez la aceleración es hacia abajo. Por lo tanto, reemplazo $a = -3\ m/s^2$

$$F_{ascensor} - 588\,N = 60\ kg.(-3\frac{m}{s^2}) \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = -180\,N + 588\,N = 408\,N$$

(e) si caemos "libremente" nuestra aceleración es la gravedad: $a = -9{,}8\ m/s^2$

$$F_{ascensor} - 588\,N = 60\ kg.(-9{,}8\frac{m}{s^2}) \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = -588\,N + 588\,N = 0$$

Como indicaba la lógica, cuando caemos "libremente" el ascensor no nos sostiene con ninguna fuerza.

Hagamos el mismo planteo, desde el Sistema de Referencia arriba del ascensor (S.N.I.). Como sabemos debemos agregar una fuerza inercial opuesta a la aceleración del sistema (el ascensor). Como esta aceleración va cambiando en cada etapa, cambia el diagrama también. Pero, en cambio, en cada etapa, *la persona está quieta desde el punto de vista dentro del ascensor*. Entonces, su aceleración referida al S.N.I. ($a_{S.N.I.}$) es siempre 0:

(a) como el ascensor se mueve a velocidad constante, su aceleración respecto a Tierra es cero, y por lo tanto tenemos: $\vec{f}_{inercial} = m.\vec{a}^* = 0$

De la 2da Ley de Newton: $F_{ascensor} - Peso = 0 \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = Peso = 588\,N$

(b) idem (a)

(c) como el ascensor acelera hacia arriba con aceleración $3\frac{m}{s^2}$, la fuerza inercial vale:

$$f_{inercial} = m.a^* = 60\,kg.3\frac{m}{s^2} = 180\,N$$

Y apunta hacia abajo (opuesta a la aceleración del ascensor). De la 2da Ley de Newton:

$$F_{ascensor} - Peso - f_i = 0 \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = 588\,N + 180\,N = 768\ N$$

(d) como la aceleración del sistema tiene el mismo valor, la fuerza inercial tiene el mismo módulo que en (c), pero cambia de sentido, pasa a estar hacia arriba (siempre es opuesta a la aceleración del sistema). De la 2da Ley de Newton:

$$F_{ascensor} - Peso + f_i = 0 \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = 588\,N - 180\,N = 408\ N$$

(e) en este caso, el sistema (el ascensor) está en caída libre, es decir que $a^* = g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$ y apunta hacia abajo. La fuerza inercial apunta entonces hacia arriba y vale:

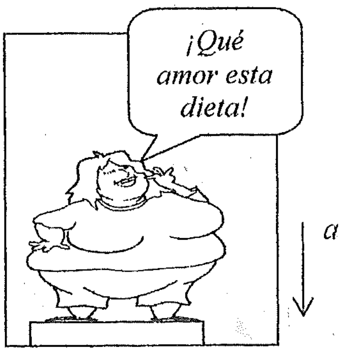
$$\vec{f}_{inercial} = m.\vec{a}^* = 60\ kg.9{,}8\frac{m}{s^2} = 588\,N$$

De la 2da Ley de Newton:

$$F_{ascensor} - Peso + f_i = 0 \xrightarrow{despejo} F_{ascensor} = 588\,N - 588\,N = 0$$

La fuerza que hace el ascensor para subirnos o bajarnos, frenando o acelerando, se puede medir poniendo una balanza sobre el piso, y parándonos encima. Veremos que la indicación de la misma cambia según el estado del movimiento.

Así, cada vez que haya aceleración hacia arriba (sea porque sube aumentando la velocidad, o baja frenando) la indicación será **mayor** que el peso de la persona, porque para que haya aceleración hacia arriba, la fuerza del piso debe ser mayor al peso. Al revés, cuando la aceleración sea hacia abajo (baja aumentando de velocidad, o suba frenando), la indicación será **menor**. Esta situación la aprovecha mi tía, para ponerse contenta.



Resumen final en sistemas no inerciales

Al plantear el problema desde un S.N.I. es muy importante haber entendido que significa cada aceleración que vemos en la ley de Newton. Por eso, ahora que vimos un ejemplo, insisto:

- $a_{S.N.I.}$ es la aceleración del objeto vista desde el sistema de referencia no inercial
- a^* es la aceleración del S.N.I (el ascensor) vista desde el S.I. (la Tierra)
- la $f_{inercial}$ es opuesta a la aceleración del S.N.I. respecto al S.I. Si no conocemos hacia donde apunta, la ecuación de Newton nos lo dirá.